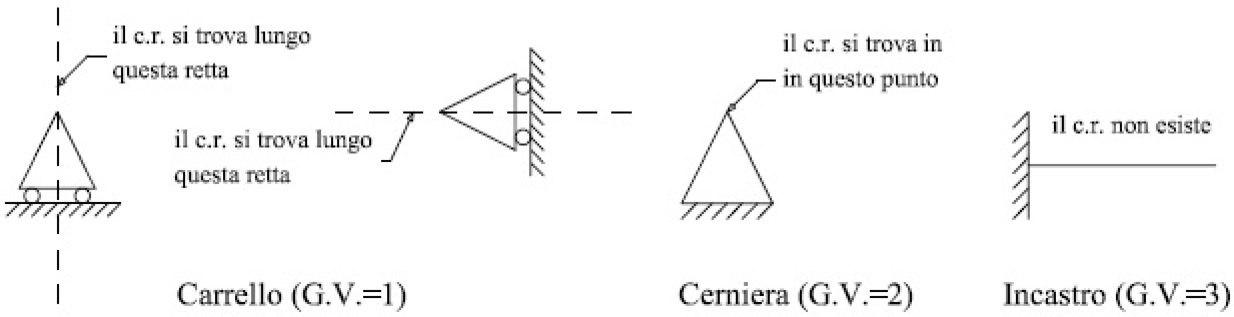
Calcolo delle reazioni vincolari di un sistema nel piano (versione rivista e semplificata)

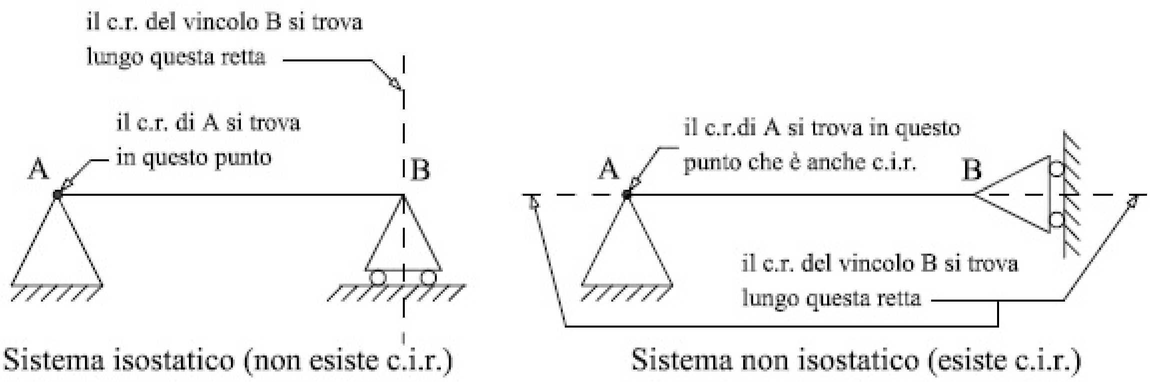
Per poter calcolare le reazioni vincolari è necessario che il sistema in esame sia *isostatico*, condizione che si verifica se valgono contemporaneamente le seguenti condizioni:

- i gradi di libertà del sistema (sempre uguali a 3, siamo nel piano) *sono uguali* alla somma dei gradi di vincolo dei vincoli presenti;
- i vincoli sono ben posti, ovvero *non esiste* il centro istantaneo di rotazione (c.i.r., punto del piano attorno al quale può ruotare il sistema).

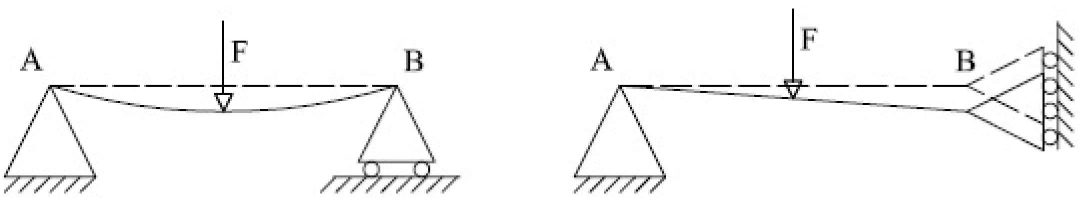
Nella figura seguente sono indicati i 3 tipi di vincoli che possiamo trovare in un sistema indicando dove si trova il loro *centro di rotazione* (c.r.) ovvero il punto attorno al quale può ruotare la struttura da loro vincolata:



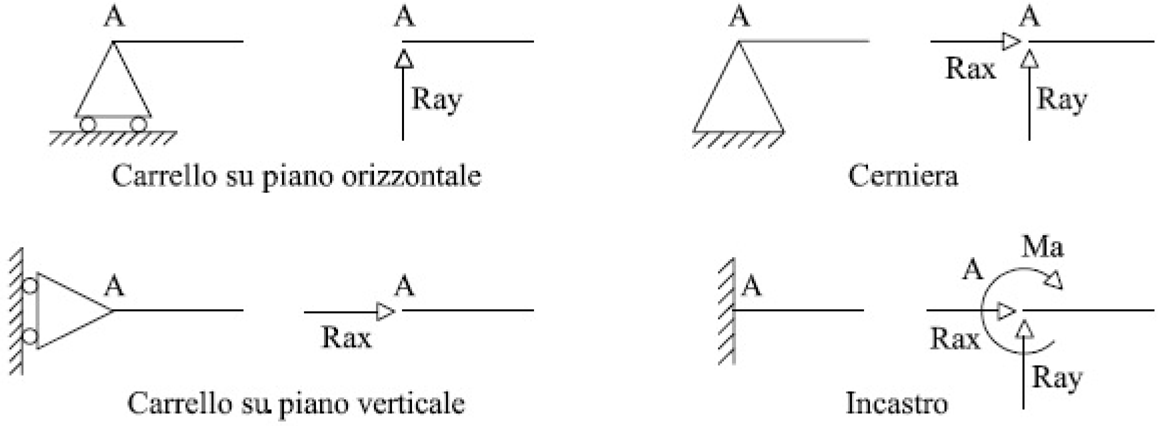
Vediamo ora due sistemi in cui vale la relazione G.L.= G.V. = 3, uno isostatico ed uno non isostatico, che in questo caso può essere definito anche labile



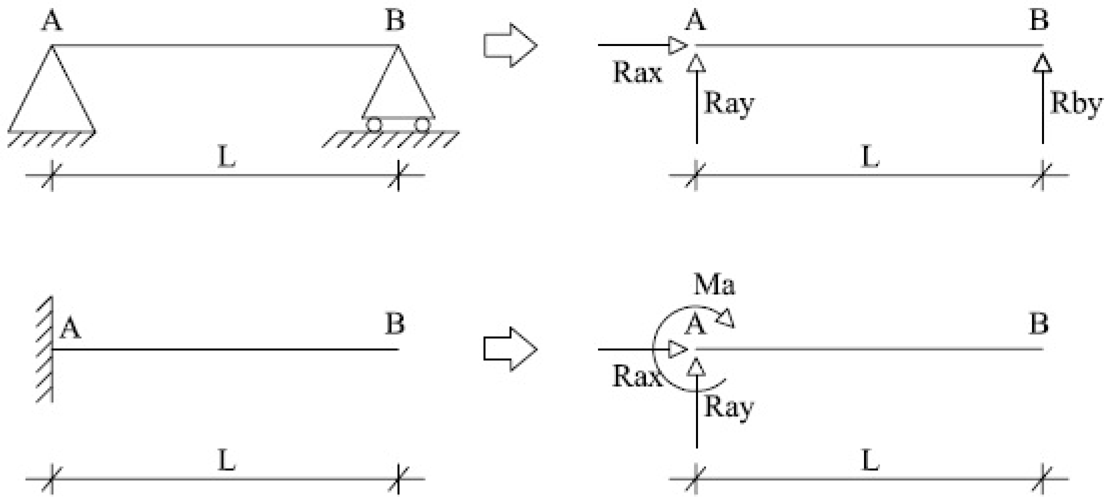
La struttura di un sistema isostatico quando viene sollecitata da una forza si deforma, mentre quella di un sistema non isostatico ruota attorno al c.i.r. e non si deforma, come possiamo vedere in figura



Solo se il sistema è isostatico possiamo calcolare le reazioni vincolari; per farlo occorre sostituire graficamente ai vincoli presenti le reazioni vincolari corrispondenti; la figura seguente mostra quali sono le reazioni equivalenti ad ognuno dei vincoli



Vediamo ora alcuni esempi di sostituzione dei vincoli con le reazioni vincolari corrispondenti



Successivamente per calcolare le reazioni vincolari occorre creare un sistema lineare contenente le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale (→), alla traslazione verticale (↑) e alla rotazione attorno ad un punto del sistema (tale punto deve essere scelto in modo da semplificare i calcoli).

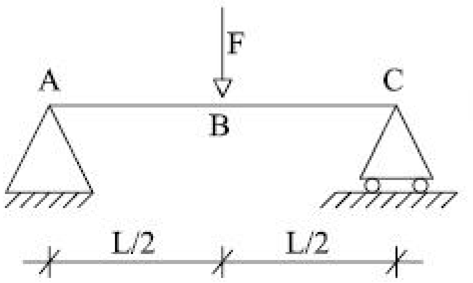
Tale sistema avrà la forma

$$\begin{cases} \rightarrow \sum Fx = 0 \\ \uparrow \sum Fy = 0 \\ \overset{+}{\circlearrowleft}_{A} \sum M = 0 \end{cases}$$

dove Σ Fx indica la somma delle forze e delle reazioni vincolari orizzontali, Σ Fy la somma delle forze e delle reazioni vincolari verticali, Σ M la somma dei momenti calcolati rispetto al punto A (in questo caso per calcolare i momenti è stato scelto il punto A.

Nelle seguenti pagine sono presenti degli esempi di calcolo delle reazioni vincolari.

Esempio 1: calcolare le reazioni vincolari del sistema in figura



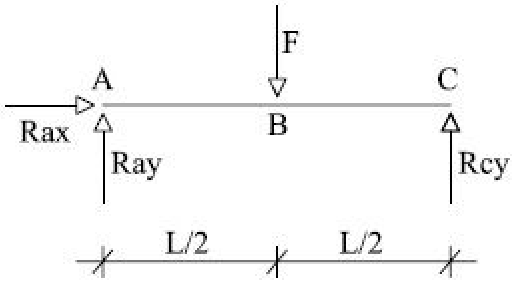
Fase 1: verifichiamo se il sistema è isostatico

I° condizione) poiché G.L. = 3 (sempre!) e G.V. = 2(A) + 1(C) = 3 abbiamo G.L. = G.V.

II° condizione) il c.r. della cerniera in A si trova nel punto corrispondente al suo snodo, quello del carrello in B si trova lungo la retta perpendicolare al suo piano di scorrimento e passante per lo snodo della sua cerniera; questo punto e questa retta non si incontrano mai quindi non esiste il c.i.r.

Entrambe le condizioni richieste sono soddisfatte quindi il sistema è isostatico

Fase 2: sostituiamo ai vincoli le reazioni vincolari corrispondenti



Fase 3: scriviamo il sistema lineare contenente le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, alla traslazione verticale e alla rotazione attorno ad un punto del sistema (per la rotazione possiamo scegliere qualunque punto della struttura; in questo esempio scegliamo il punto A)

$$\begin{cases} \rightarrow Rax=0 \\ \uparrow Ray-F+Rcy=0 \\ \circlearrowleft_A \; F\dfrac{L}{2}-Rcy\,L=0 \end{cases}$$

risolviamo ora il sistema e ricaviamo le reazioni vincolari rappresentate dalle incognite Rax, Ray e Rcy; l'incognita Rax è già risolta, il suo valore è nullo. La seconda equazione non è risolvibile, per ora, quindi passiamo alla terza equazione

$$F\frac{L}{2}-Rcy\,L=0$$

che con alcuni passaggi possiamo trasformare in

$$F\frac{L}{2}-Rcy\,L=0 \quad\rightarrow\quad F\frac{L}{2}-Rcy\,L+Rcy\,L=Rcy\,L \quad\rightarrow\quad F\frac{L}{2}=Rcy\,L \quad\rightarrow\quad \frac{F}{2}=Rcy \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad Rcy=\frac{F}{2}$$

che inserita nel sistema ci permette di scrivere

$$\begin{cases} Rax=0 \\ Ray-F+Rcy=0 \\ Rcy=\frac{F}{2} \end{cases}$$

sostituiamo ora il valore calcolato dell'incognita Rcy nella seconda equazione

$$\begin{cases} Rax=0 \\ Ray-F+\frac{F}{2}=0 \\ Rcy=\frac{F}{2} \end{cases}$$

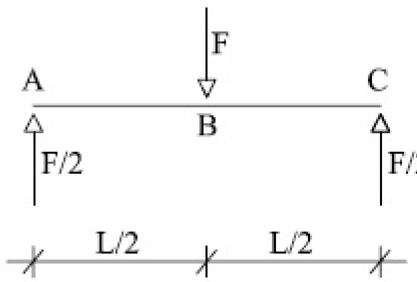
poiché

$$-F+\frac{F}{2}=-\frac{F}{2}$$

abbiamo

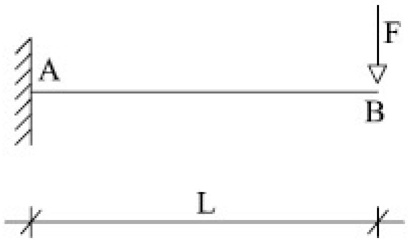
$$\begin{cases} Rax=0 \\ Ray-\frac{F}{2}=0 \\ Rcy=\frac{F}{2} \end{cases} \quad \text{che diviene} \quad \begin{cases} Rax=0 \\ Ray=\frac{F}{2} \\ Rcy=\frac{F}{2} \end{cases}$$

Fase 4: per verificare se i calcoli sono esatti inseriamo i valori delle incognite nella figura realizzata al punto 2



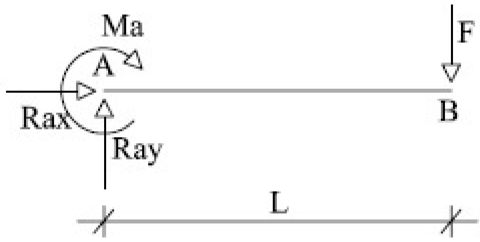
Come si può vedere il sistema risulta perfettamente equilibrato.

Esempio 2: calcolare le reazioni vincolari del sistema in figura



Fase 1: il sistema è isostatico perché G.L.=3 e G.V. (A)=3 e perché il vincolo in A non ha centro di rotazione.

Fase2: sostituisco al vincolo in A le reazioni vincolari corrispondenti



Fase 3: scrivo e risolvo il sistema lineare contenente le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \rightarrow Rax=0 \\ \uparrow Ray-F=0 \\ \circlearrowleft_{A}^{+} \; Ma+FL=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Rax=0 \\ Ray=F \\ Ma=-FL \end{cases}$$

Fase 4: inserisco i valori delle reazioni vincolari nella figura realizzata al punto 2